

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2016

- الموضوع -

NS 24

ⵜⴰⵎⴰⵎⴰⵔⵜ ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵎ
ⵜⴰⵎⴰⵎⴰⵔⵜ ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵎ
ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵎ ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵎ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم
والامتحانات والتوجيه



4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنىات الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(7 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(3 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3.5 نقط)

نذكر أن $(M_3(\mathbb{C}), +, \cdot)$ حلقة واحدة وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ جسم تبادلي.

لكل (x, y) من \mathbb{C}^2 ، نضع: $M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}$ و $E = \{M(x, y); (x, y) \in \mathbb{C}^2\}$

1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{C}), +)$ 0.5

2- تحقق أن: 0.5

$$M(x, y) \cdot M(x', y') = M(xx' - yy', xy' + yx')$$

3- نضع $E^* = E - \{M(0, 0)\}$ ونعتبر التطبيق: $\mathbb{C}^2 \rightarrow E^*$: $(x, y) \mapsto M(x, y)$ الذي يربط العدد العقدي $z = x + iy$ بالمصفوفة

$M(x, y)$ من E ، حيث الزوج (x, y) من \mathbb{C}^2

(أ) بين أن E^* تشاكل من $(\mathbb{C}^2, +)$ نحو (E^*, \cdot) 0.25

(ب) استنتج أن (E^*, \cdot) زمرة تبادلية و أن عنصرها المحايد هو $M(1, 0)$ 0.75

4- بين أن $(E, +, \cdot)$ جسم تبادلي. 0.5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(أ) أحسب $A \cdot M(x, y)$ من أجل $M(x, y)$ عنصر من E 0.5

(ب) استنتج أن كل عنصر من عناصر E لا يقبل ماثلا في $(M_3(\mathbb{C}), \cdot)$ 0.5

التمرين الثاني: (3 نقط)

الجزء الأول: ليكن (a, b) عنصرا من $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ بحيث العدد الأولي 173 يقسم $a^3 + b^3$

1- بين أن: $[173] \mid a^{171} \equiv -b^{171}$ (لاحظ أن: $171 = 3 \times 57$) 0.25

2- بين أن: 173 يقسم a إذا و فقط إذا كان 173 يقسم b 0.25

3- نفترض أن 173 يقسم a . بين أن 173 يقسم $a + b$ 0.25

4- نفترض أن 173 لا يقسم a

(أ) باستعمال ميرهنة فيرما بين أن: $[173] \mid a^{172} \equiv b^{172}$ 0.5

(ب) بين أن: $[173] \mid a^{171}(a + b) \equiv 0$ 0.5

(ج) استنتج أن 173 يقسم $a + b$ 0.5

الجزء الثاني: نعتبر في $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ المعادلة التالية: $(E) \quad x^3 + y^3 = 173(xy + 1)$

ليكن (x, y) عنصرا من $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ حلا للمعادلة (E) ؛ نضع: $x + y = 173k$ ، حيث $k \in \mathbb{R}^*$

1- تحقق أن: $k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$ 0.25

2- بين أن: $k = 1$ ثم حل المعادلة (E) . 0.5

التمرين الثالث: (3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و موجه (O, \vec{u}, \vec{v}) .

نعتبر نقطتين M_1 و M_2 من المستوى العقدي بحيث النقط O و M_1 و M_2 مختلفة مثنى مثنى و غير مستقيمة.

ليكن z_1 و z_2 لحقي M_1 و M_2 على التوالي و لتكن M النقطة التي لحقها z يحقق العلاقة: $z = \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$

1- (أ) بين أن: $\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1$ 0.5

(ب) استنتج أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OM_1M_2 0.5

2- بين أنه إذا كانت $z_2 = \overline{z_1}$ فإن M تنتمي إلى المحور الحقيقي. 0.5

3- نفترض أن M_2 هي صورة M_1 بالدوران r الذي مركزه O و قياس زاويته α حيث α ينتمي إلى $]0, \pi[$

(أ) احسب z_2 بدلالة z_1 و α 0.5

(ب) استنتج أن النقطة M تنتمي إلى واسط القطعة $[M_1M_2]$ 0.5

4- ليكن θ عددا حقيقيا معلوما من $]0, \pi[$

نفترض أن z_1 و z_2 هما حلا للمعادلة: $6t^2 - (e^{i\theta} + 1)t + (e^{i\theta} - 1) = 0$

(أ) بدون حساب z_1 و z_2 تحقق أن: $z = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$ 0.5

(ب) أعط الصيغة المثلثية للعدد العقدي z بدلالة θ . 0.5

التمرين الرابع: (7 نقط)

الجزء الأول:

1- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t \mapsto e^{-t}$ ، بين أنه لكل عدد حقيقي موجب قطعاً x يوجد عدد حقيقي

θ محصور بين 0 و x بحيث: $e^\theta = \frac{x}{1 - e^{-x}}$ 0.5

2- استنتج أن:

(أ) $1 - x < e^{-x}$; $(x > 0)$ 0.25

(ب) $x + 1 < e^x$; $(x > 0)$ 0.25

(ج) $0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right) < x$; $(\forall x > 0)$ 0.25

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي: $f(0) = 1$ و $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$ إذا كان $x > 0$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

0.5 1- أ) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0

0.5 ب) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ ثم أول مبيانها النتيجة المحصل عليها.

0.25 2- أ) بين أن: $x - \frac{x^2}{2} \leq e^{-x} + 1$ (" $x^3 > 0$) (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2- أ) من الجزء الأول)

0.5 ب) استنتج أن: $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$ (" $x^3 > 0$)

0.5 3- أ) تحقق أن: $\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} f(x)$ (" $x > 0$)

0.75 ب) استنتج أن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{2}$ ثم أول النتيجة المحصل عليها.

0.75 4- أ) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ وأن $f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2}$ (" $x > 0$)

0.5 ب) استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على $]0, +\infty[$. (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2- ب) من الجزء الأول)

الجزء الثالث:

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0 > 0$ و $u_{n+1} = \ln(f(u_n))$ لكل عدد صحيح طبيعي n

0.5 1- بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n لدينا: $u_n > 0$

0.5 2- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2- ج) من الجزء الأول)

0.5 3- بين أن 0 هو الحل الوحيد للمعادلة: $\ln(f(x)) = x$ ثم حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$

التمرين الخامس: (3 نقط)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي: $F(x) = \int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt$

0.5 1- أ) أدرس إشارة $F(x)$ لكل x من I

0.5 ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال I و احسب $F'(x)$ لكل x من I .

0.25 ج) بين أن الدالة F تزايدية قطعا على المجال I

0.5 2- أ) باستعمال تقنية تغيير المتغير و ذلك بوضع: $u = \sqrt{e^t - 1}$ ، بين أنه لكل x من I لدينا:

$$\int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = 2 \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{2}$$

0.5 ب) احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$

0.25 3- أ) بين أن الدالة F تقابل من المجال I نحو مجال J يتم تحديده.

0.5 ب) حدد التقابل العكسي F^{-1} للتقابل F .

انتهى